Kreis

Ein Kreis (die Kreislinie) *k* ist definiert als die Menge aller Punkte *X* einer Ebene, die von einem *Mittelpunkt M* den gleichen Abstand *r* haben:

$$k(M;r) = \{X|\overline{XM} = r\}$$

Gegeben ist nun ein bestimmter Kreis k. Die kartesischen Koordinaten jedes Punktes *X(x | y)* auf diesem Kreis *k* erfüllen die Kreisgleichung:

$$k{:}\ \ x^2 + y^2 - 6x - 2y = 15$$

a) Wie viele Punkte haben die x-Koordinate -1 ?
Begründe rechnerisch und stelle graphisch dar!

b) Die Gerade $t{:}\,y = -\frac{3}{4}x + 9\frac{1}{2}$ ist eine Tangente an den Kreis *k*, da sie mit diesem genau einen *Berührpunkt* $T(\,x\,|\,y\,)$ gemeinsam hat.
Die Koordinaten von T erfüllen folgende Gleichung:

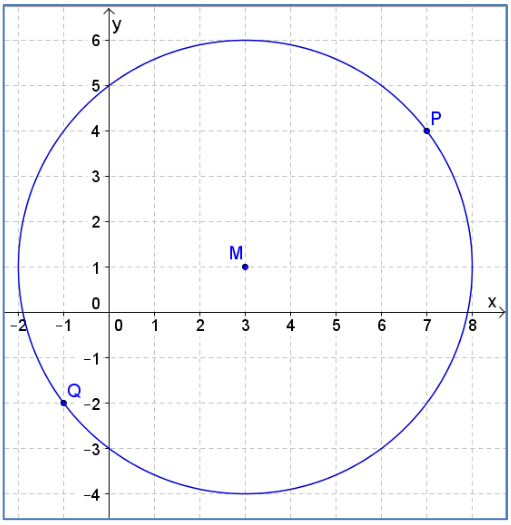
$$x^2 + \left(-\frac{3}{4}x + 9\frac{1}{2}\right)^2 - 6x - 2\left(-\frac{3}{4}x + 9\frac{1}{2}\right) = 15$$

Weise mithilfe dieser Gleichung nach, dass t tatsächlich eine Tangente an k ist, und überprüfe graphisch.

c) Die Abbildung rechts zeigt den durch die Gleichung gegebenen Kreis im Koordinatensystem.
Überprüfe, ob das für die Punkte P und Q gilt:

$$P \in k \quad und \quad Q \in k$$

Begründe deine Überlegungen in allgemeiner Form! Lies dazu die Koordinaten des Mittelpunktes *M* aus der Abbildung ab und zeige mithilfe des Satzes von Pythagoras: Jeder Punkt $X(\,x\,|\,y)$, der die Kreisgleichung erfüllt, hat von M den Abstand $r = 5$.
Stelle deine Überlegungen auch graphisch dar!

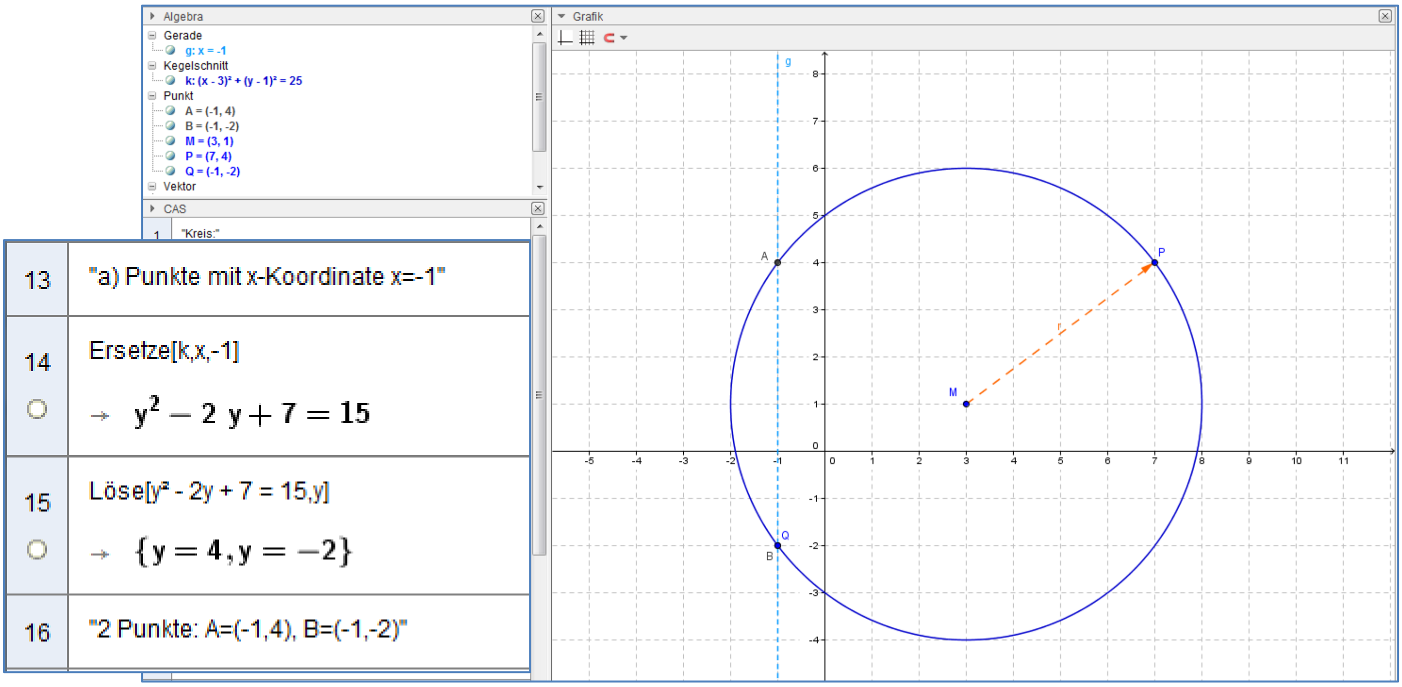


d) Unter dem Einheitskreis versteht man einen Kreis mit Radius $r = 1$, dessen Mittelpunkt M im Koordinatenursprung liegt. Alle Punkte auf dem Einheitskreis erfüllen die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$.
Stelle den Flächeninhalt mithilfe eines bestimmten Integrals einer geeigneten Funktion graphisch und rechnerisch dar und gib an, welche Integrationsmethoden zur Lösung dieses Integrals herangezogen werden können.

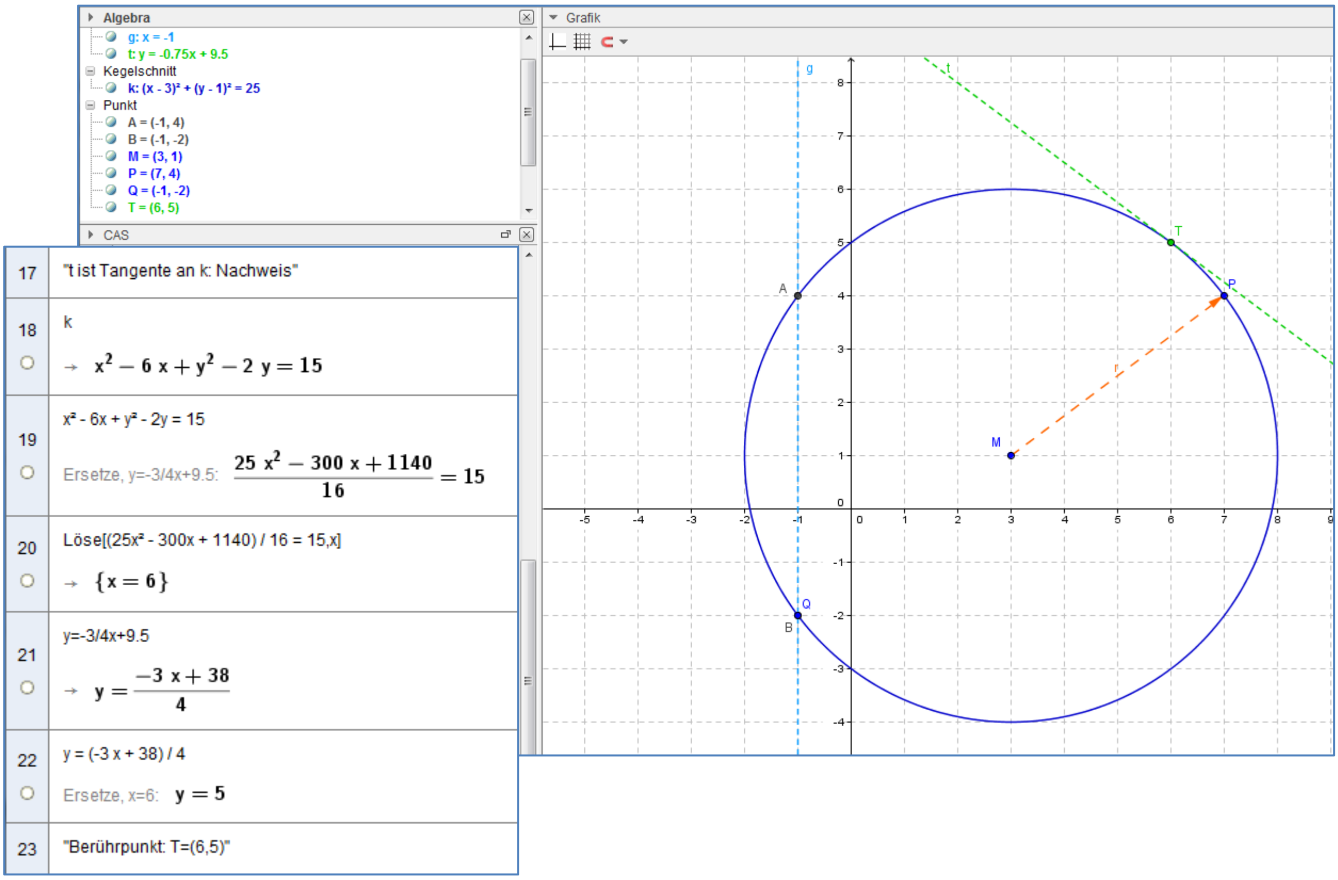
Zu a)

$$k: \ x^2 + y^2 - 6x - 2y = 15$$
$$k(-1): \quad 1 + y^2 + 6 - 2y = 15$$
$$y^2 - 2y - 8 = 0$$
$$y_{1/2} = 1 \pm \sqrt{1+9}$$
$$y_1 = 4 \quad y_2 = -2$$
$$A = (-1|4) \quad B = (-1|-2)$$

Zwei Punkte haben die x-Koordinate -1.



Zu b)



Substitutionsmethode: Einsetzen der Tangentengleichung $t: y = -\frac{3}{4}x + 9\frac{1}{2}$ in die Kreisgleichung:
Lösung der quadratischen Gleichung muss eine Diskriminante $D = 0$ liefern.
Daraus folgt $x_{1/2}$ ist Doppellösung – Berührpunkt!

$$x^2 + \left(-\frac{3}{4}x + 9\frac{1}{2}\right)^2 - 6x - 2\left(-\frac{3}{4}x + 9\frac{1}{2}\right) = 15$$

$$x^2 + \frac{9}{16}x^2 - \frac{57}{4}x + \frac{19^2}{4} - 6x + \frac{3}{2}x - 19 = 15$$

$$\frac{25}{16}x^2 - \frac{75}{4}x + \frac{225}{4} = 0 \quad | \cdot 16$$

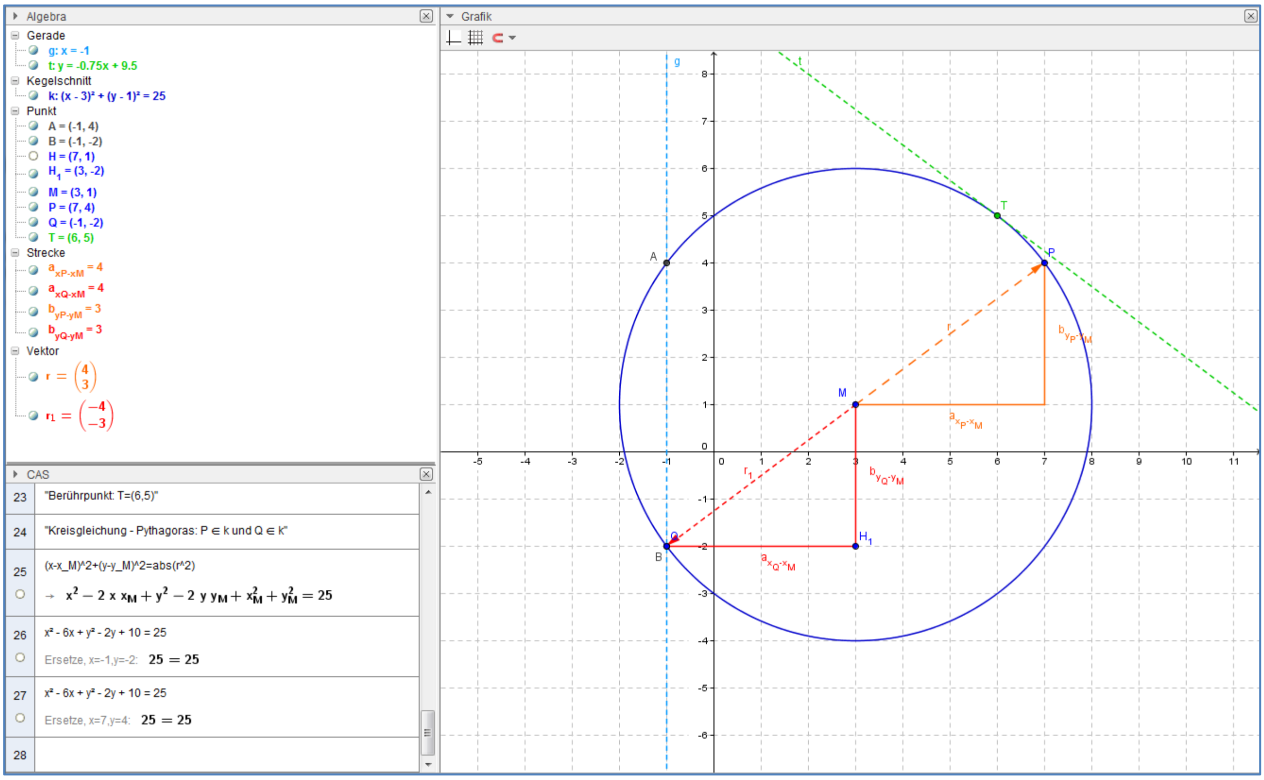
$$25x^2 - 300x + 900 = 0 \quad |: 25$$

$$x^2 - 12x + 36 = 0$$

$$x_{1/2} = 6 \pm \sqrt{36 - 36}$$

$$x_{1/2} = 6 \quad \Rightarrow \quad y = 5 \qquad T = (6|5)\ Berührpunkt$$

Zu c)



Zu zeigen: $P \in k(M, r)$ *und* $Q \in k(M, r)$ *mit* $M = (3,1)$ *und* $r = 5$

Rechnerische Ermittlung von r:

$$k\colon\ x^2+y^2-6x-2y=15$$
$$x^2+y^2-2x_Mx-2y_My=15$$
$$x_M=3 \quad y_M=1$$
$$r^2-{x_M}^2-{y_M}^2=15$$
$$r^2-3^2-1^2=15$$
$$r^2=25$$
$$r=5$$

Allgemeine Begründung nach Lehrsatz des Pythagoras:

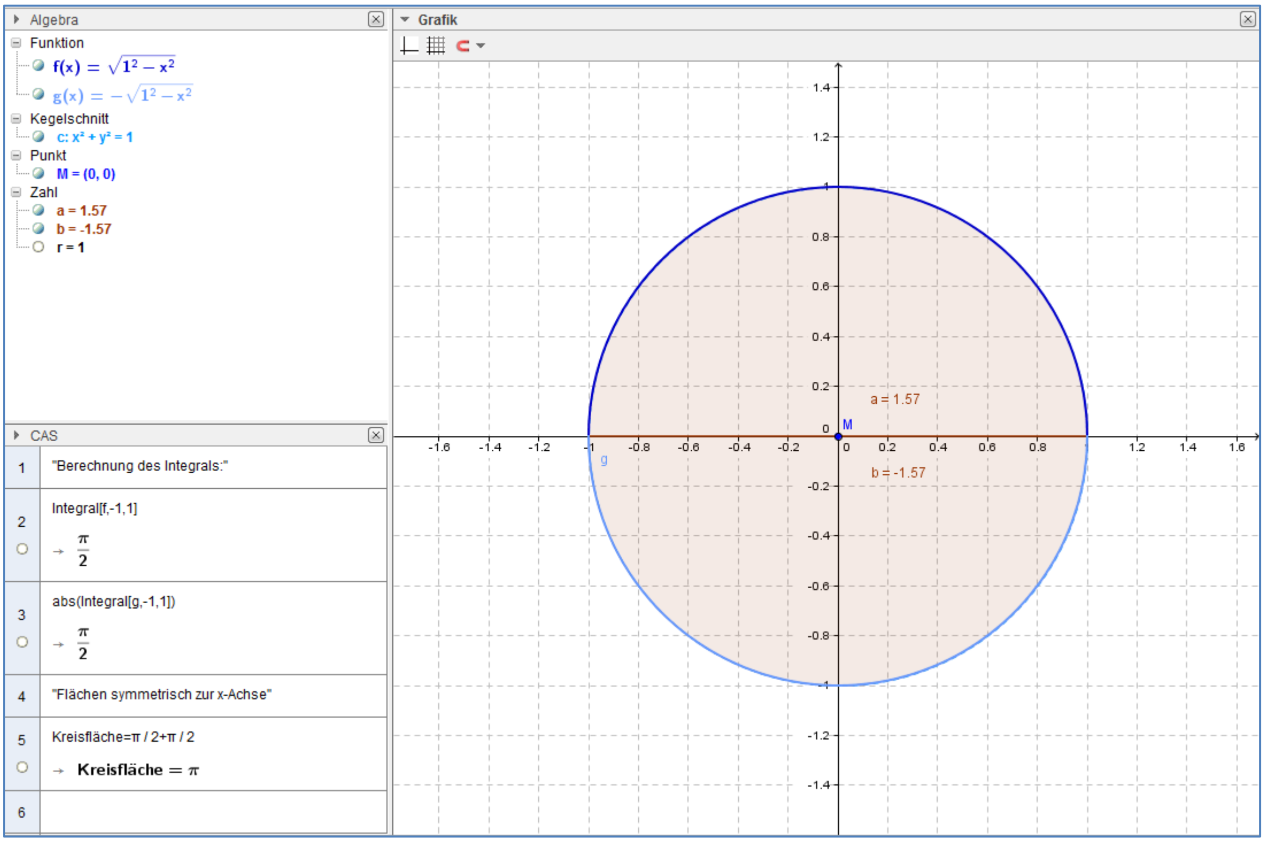
$$(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$$
$$(x-3)^2+(y-1)^2=25$$

Einsetzen der Punkte $P=(7|4)$ und $Q=(-1|-2)$:

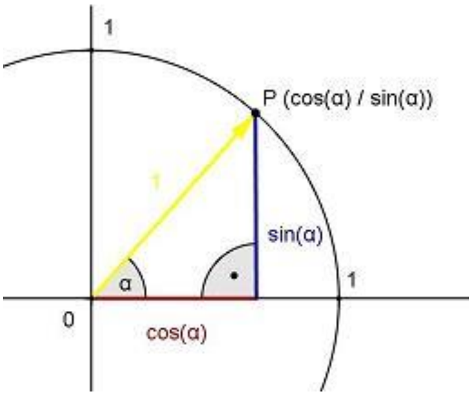
$$(x-x_M)^2+(y-y_M)^2=r^2$$
$$P\colon\quad (7-3)^2+(4-1)^2=25$$
$$16+9=25 \qquad w.A$$

$$Q\colon\quad (-1-3)^2+(-2-1)^2=25$$
$$16+9=25 \qquad w.A.$$

Zu d)



Fläche des Einheitskreises: $A = r^2\pi \quad \Rightarrow \quad A = \pi$



Kreisgleichung in Hauptlage:

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$y^2 = 1 - x^2$$
$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

$$Funktion: \;\; f(x):\; y = \sqrt{1 - x^2}$$

Trigonometrische Formel – Idee zur Substitution:

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$
$$\sin^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi$$
$$\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$$

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$$

Integrationsmethode: Substitution

$$x = \sin \varphi$$
$$Ableitung: \frac{dx}{d\varphi} = \cos \varphi$$
$$dx = \cos \varphi \; d\varphi$$

Integrationsgrenzen anpassen: $\sin(0) = 0 \quad und \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ (Winkel im Bogenmaß)

Integral zur Berechnung der Kreisfläche:

$$A = 4\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} \cdot \cos \varphi \; d\varphi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \, d\varphi$$

$$Partielle\ Integration\ *$$

$$= 4 \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (sin\varphi \cdot cos\varphi + \varphi)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - 0\right) = \pi$$

Partielle Integration *: $\int f(x) \cdot g'(x)\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\, dx$

$$f(\varphi) = \cos \varphi \qquad g(\varphi) = \sin \varphi$$
$$f'(\varphi) = -\sin \varphi \qquad g'(\varphi) = \cos \varphi$$

$$\int \cos^2 \varphi \, d\varphi = \int \underbrace{\cos \varphi}_{f(\varphi)} \cdot \underbrace{\cos \varphi}_{g'(\varphi)} \, d\varphi = \cos \varphi \cdot \sin \varphi - \int -\sin \varphi \cdot \sin \varphi \; d\varphi =$$

$$= \cos \varphi \cdot \sin \varphi + \int \sin^2 \varphi \; d\varphi =$$

$$= \cos \varphi \cdot \sin \varphi + \int 1 - \cos^2 \varphi \; d\varphi =$$

$$= \cos \varphi \cdot \sin \varphi + \varphi - \int \cos^2 \varphi \; d\varphi \qquad | + \int \cos^2 \varphi \, d\varphi$$

$$2\int \cos^2 \varphi \; d\varphi = \cos \varphi \cdot \sin \varphi + \varphi \qquad |:2$$

$$\int \cos^2 \varphi \; d\varphi = \frac{1}{2} \cdot (\cos \varphi \cdot \sin \varphi + \varphi\,)$$