

Waldsterben

Luftverschmutzung (z.B. durch Emissionen) ist ein bekannter Faktor, der Waldsterben verursacht. In einer Langzeitstudie wurde in einem Waldabschnitt neben der Autobahn die Anzahl der kranken Bäume festgehalten.

Im Jahr 1980 zählte man 20 kranke Bäume, im Jahr 1990 waren es bereits 60 kranke Bäume. Da manche Baumarten resistent gegen gewisse Schadstoffe sind, können in diesem Waldstück höchstens 600 Bäume Schaden erleiden.

- a) Berechne nach dem Gesetz des beschränkten Wachstums
 $f(t) = G - a \cdot e^{-k \cdot t}$ (mit $t \geq 0, a, k > 0$)
 die Funktion, welche diesen Prozess des Waldsterbens beschreibt!
 (In den Berechnungen ist zu zeigen, dass die Parameter: $G = 600$, $a = 580$ und
 $k = -\frac{\ln(\frac{27}{29})}{10}$ die Funktionsgleichung erfüllen)
- b) Wie viele Bäume werden im Jahr 2015 bereits geschädigt sein?
- c) Wie viele Bäume werden (ohne Gegenmaßnahmen) nach dem vorgegebenen Trend zwischen 2015 bis 2030 im Mittel jährlich erkranken?
- d) Wie viele Bäume werden im Jahr 2015 neu erkranken? In welchem Jahr ist zu erwarten, dass die Hälfte des Baumbestandes in diesem Waldabschnitt geschädigt ist?
- e) Stelle die Vorgänge des gegebenen beschränkten Wachstumsprozesses, welcher in a) bis d) beschrieben wird, graphisch (in GGB) dar!

Laut Immissionsschutzgesetz-Luft (IG-L) gilt auf manchen Autobahnabschnitten in Österreich für PKW eine Tempo-100-Beschränkung, wenn die Grenzwerte für bestimmte Luftschadstoffe überschritten werden. Für LKW gilt ein generelles Tempolimit von 80 km/h.

Abb. 1. zeigt vier Messwerte für die freigesetzte Menge an Stickoxiden (NO_x) bei unterschiedlicher Fahrgeschwindigkeit für einen durchschnittlichen PKW.

Die freigesetzte Stickoxidmenge wird in g/km angegeben.

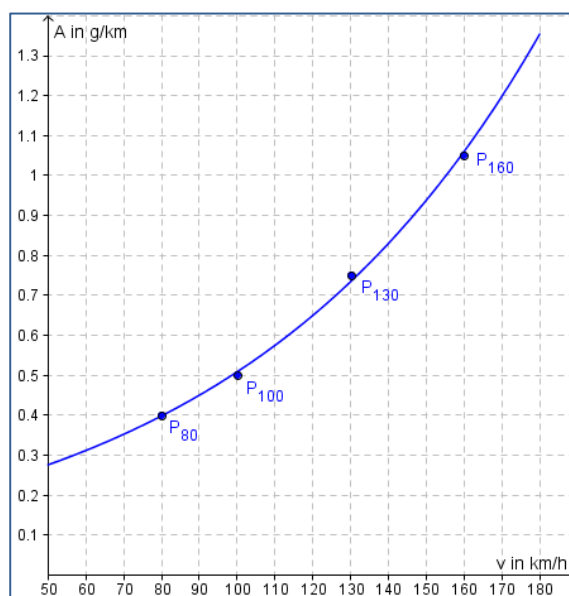


Abbildung 1

- f) Ermittle anhand der dargestellten Messwerte, um wie viel Prozent der Stickoxid-Ausstoß eines PKW abnimmt, wenn statt der üblichen erlaubten 130 km/h nur mit der Geschwindigkeit von 100 km/h gefahren werden darf.
Ist der Stickoxid-Ausstoß eines PKW direkt proportional zur Fahrgeschwindigkeit?
Begründe die Antwort anhand des Graphen der Modellfunktion in Abbildung 1!

Die folgende Abbildung 2 zeigt den derzeitigen Anteil der Verkehrsmittel (PKW, LKW, sonstige) am Verkehrsaufkommen und am Ausstoß (=Emission) von Stickstoff und Feinstaub (PM 10) im oben angeführten Waldabschnitt neben der Autobahn.

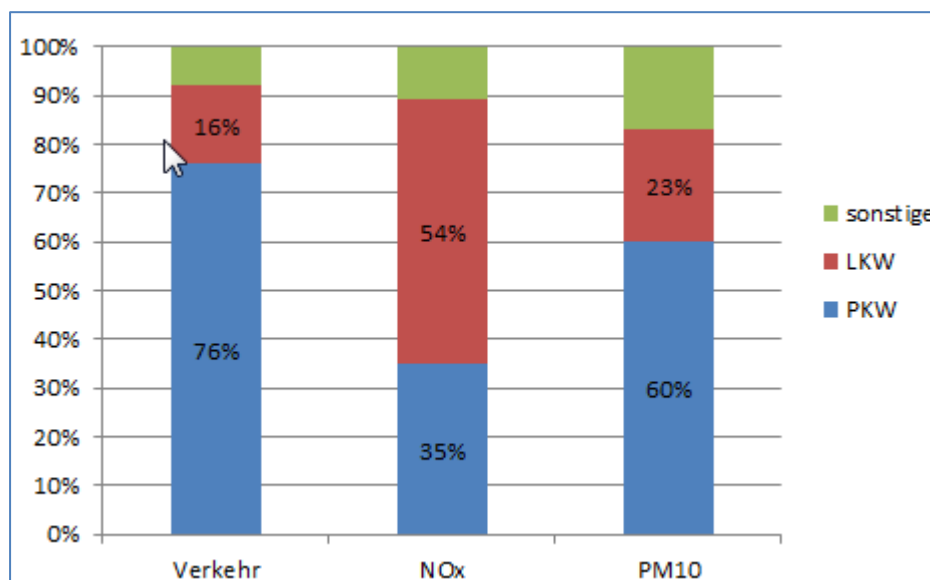


Abbildung 2

- g) Verursachen im Waldabschnitt neben der Autobahn die Verkehrsmittel mit dem größten Anteil am Verkehrsaufkommen auch die meisten Stickoxid- und Feinstaub – Emissionen? Nenne stichhaltige Argumente für die Antwort!

Zu a) Gesetz des beschränkten Wachstums

Berechnung der Parameter a und k :

$$f(t): y = G - a \cdot e^{-k \cdot t} \quad (\text{mit } t \geq 0, a, k > 0)$$

für $G = 600$ einsetzen

Anfangszustand zum Zeitpunkt t_0 sind 20 Bäume erkrankt

$$20 = 600 - a \cdot \underbrace{e^{-k \cdot 0}}_1$$

$$\underline{a = 580}$$

Zustand zum Zeitpunkt t_{10} gibt es bereits 60 kranke Bäume

$$60 = 600 - 580 \cdot e^{-k \cdot 10}$$

$$\frac{-540}{-580} = e^{-k \cdot 10}$$

$$-\frac{\ln\left(\frac{27}{29}\right)}{10} = k$$

$$0,007145 \dots = k$$

Gesetz für beschränktes Wachstum:

$$f(x): y = 600 - 580 \cdot e^{-0,007145 \dots x}$$

Zu b) Zustand 2015 (t_{35})

$$\begin{aligned} f(35): y &= 600 - 580 \cdot e^{-0,007145 \dots 35} \\ y &= 148,34 \dots \end{aligned}$$

Es werden bereits ca. 149 Bäume erkrankt sein!

Zu c) Trend zwischen 2015 und 2030: (mittlere Änderung)

$$\begin{aligned} f(50): y &= 600 - 580 \cdot e^{-0,007145 \dots 50} \\ y &= 194,251 \dots \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(50) - f(35)}{50 - 35} = \frac{194,251 \dots - 148,34 \dots}{50 - 35} = 3,0605 \dots$$

Es werden zwischen 2015 und 2030 im Mittel ca. 3 Bäume jährlich erkranken.

Zu d) Neu erkrankte Bäume 2015 (momentane Änderung)

$$f'(x): y' = (-0,007145 \dots) \cdot (-580) \cdot e^{-0,007145 \dots x}$$

$$f'(35) = 3,227 \dots$$

Es werden ca. 3 Bäume neu im Jahr 2015 erkranken.

Wann ist die Hälfte des Baumbestandes beschädigt:

$$300 = 600 - 580 \cdot e^{-0,007145 \dots x} \quad | - 600$$

$$-300 = -580 \cdot e^{-0,007145 \dots x} \quad | : (-580)$$

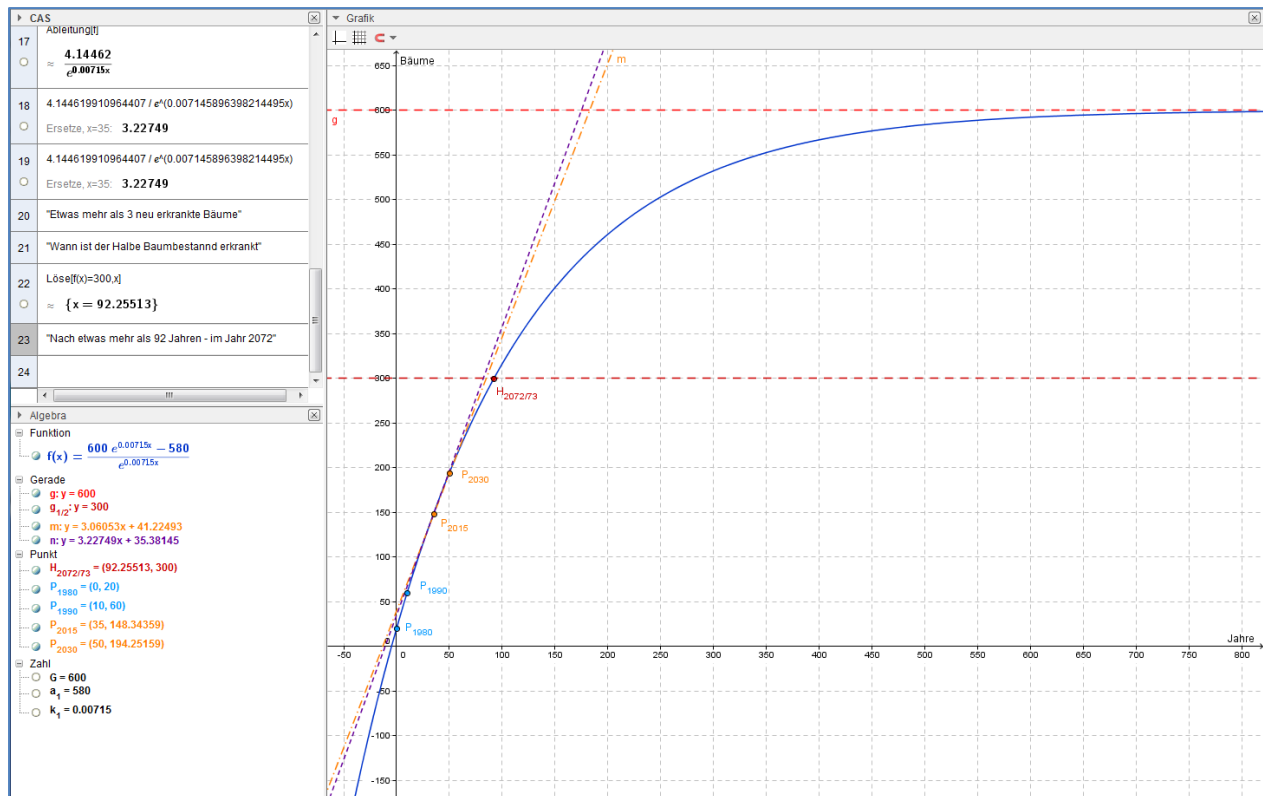
$$\frac{15}{29} = e^{-0,007145 \dots x} \quad | \ln$$

$$\frac{\ln\left(\frac{15}{29}\right)}{-0,007145 \dots} = x$$

$$92,2551 \dots = x$$

Nach etwas mehr als 92 Jahren, d.h. im Jahr 2072, wird die Hälfte der Bäume erkrankt sein!

Zu e)



Zu f)

$$P_{130} = (130|0,75) \quad P_{100} = (100|0,5)$$

$$0,75 - 0,5 = 0,25$$

$$\text{Prozentuell: } A = G \cdot \frac{p}{100}$$

$$1 - \frac{0,5}{0,75} = \frac{1}{3} \approx 33,3 \%$$

Schadstoffreduktion beträgt ca. 33,3 %

Der NO_x – Ausstoß ist nicht proportional zur Fahrgeschwindigkeit! Die Modellfunktion ist exponentiell oder quadratisch.

Zu g)

Die Verkehrsmittel mit dem größten Anteil (PKW mit 76%) verursachen zwar den höchsten Anteil an der Feinstaubbelastung (PM10) mit 60%, aber der Ausstoß an Stickoxiden ist mit 35% weit unter dem Belastungswert von 54%, der vom Anteil (16%) der LKWs verursacht wird!